

2026 年度 神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程 入学試験問題
(数学：機械工学専攻)

注意事項

- (1) 問題 1 ～問題 3 は問題用紙の表面に，問題 4 は問題用紙の裏面にあります。
- (2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題 1 は，左上端に 1 と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合，採点の対象となりません。
- (3) 解答欄が不足した場合は，裏面に書いてよろしい。ただし，表と上下を逆にしてください。
- (4) 受験番号と科目名の裏の部分には，何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1) 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点 (a, b, c) における接平面 $T_{(a,b,c)}$ を考える. ただし, a, b, c は正の実定数とする.

(1-a) 接平面 $T_{(a,b,c)}$ の方程式を求めよ.

(1-b) 接平面 $T_{(a,b,c)}$ と平面 $x = 0$, 平面 $y = 0$, 平面 $z = 0$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ. また, a, b, c を正の実数の範囲で動かしたときの V の最小値と, その最小値を与える a, b, c の値を求めよ.

(2) $-\pi < \theta < \pi$ を満たす実定数 θ に対し $A = \begin{pmatrix} 0 & \tan \frac{\theta}{2} \\ -\tan \frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix}$ とし, I を 2 次の単位行列とする. このとき, 行列 $(I - A)(I + A)^{-1}$ を $\sin \theta, \cos \theta$ のみを用いて表わせ.

2. 複素関数 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z - i}$ を考える. $R > 1$ とし, 複素平面上の R から iR に至る線分を C_1 , iR から $-R$ に至る線分を C_2 , $-R$ から R に至る線分を C_3 とし, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ とする.

(1) 複素積分 $\int_C f(z) dz$ の値を求めよ.

(2) z が C_1 上にあるとき $|z - i| \geq \frac{R-1}{\sqrt{2}}$ となることを示せ.

(3) (2) の結果を用いて, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz = 0$ となることを示せ.

(4) (1) と (3) の結果を用いて, 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + x \sin x}{x^2 + 1} dx$ の値を求めよ. ただし, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) dz = 0$ を用いてよい.

3. $y = y(x)$, $x \geq 0$ に関する次の微分方程式

$$y' = (4x - y + 2)^2 \quad (*)$$

を考える.

(1) α, β を実定数とする. $y(x) = \alpha x + \beta$ が方程式 $(*)$ の解となるような α と β の組を全て求めよ.

(2) 変数変換 $u = 4x - y + 2$ により, u に関する微分方程式を導け.

(3) (2) で導出した微分方程式を解き, 条件 $y(0) = 1$ を満たす方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ を求めよ.

(裏面へ続く)

4. 関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ とする.

(1) $\sin t$ のラプラス変換を求めよ.

(2) $g(t) = \int_0^t f(x)dx$ のラプラス変換を $G(s)$ と表わす. $F(s)$ と s を用いて $G(s)$ を表わせ. ただし, s はラプラス変換 $F(s)$ および $G(s)$ が存在するような複素数とする.

(3) 次の等式を満たす関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ.

$$f(t) - 2 \int_0^t f(x)dx + \int_0^t \left(\int_0^x f(y)dy \right) dx = t \sin t, \quad t \geq 0$$