平成31年度

神戸大学大学院工学研究科　博士課程前期課程　入学試験問題

（数学：機械工学専攻）

注意事項

(1) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください．例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください．解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません．

(2) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい．ただし、表と上下を逆にしてください．

(3) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません．

1. つぎの各問いに答えよ．

(1) 集合 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}$ に対して，2重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{1}{3}x^3 - x} y\, dxdy$ の値を求めよ．

(2) α を0でない実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，A^n の固有値を全て求めよ．ただし n は自然数とする．

2. x, y を実数とし，実数値関数 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x$ を考える．

(1) コーシー・リーマンの関係式 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ および $v(0,0) = 0$ を満たす実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(2) 複素変数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を考える．$f(z)$ を z のみを用いて表わせ．

(3) 複素平面上の点 i を中心とし，半径 $\sqrt{2}$ の反時計方向に向き付けられた円周を C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{f(z)}\, dz$ の値を求めよ．

3. n を自然数とし，関数 $f_n(x) = \begin{cases} n, & |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$ を考える．

(1) $f_n(x)$ のフーリエ変換 $\displaystyle\hat{f}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-itx}\, dx,\ -\infty < t < \infty$ を求めよ．

(2) 任意に固定された $t \neq 0$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(t)$ を求めよ．また，任意に固定された自然数 n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to 0} \hat{f}_n(t)$ を求めよ．

(3) (1) の結果を利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{t}{n}}{t}\, dt$ の値を求めよ．

4. $\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ に関する微分方程式系

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y} + e^x \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

を考える．ここで $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ は定ベクトルとする．

(1) 行列の指数関数 e^{xA} を求めよ．ここで $\displaystyle e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k,\ A^0 = I$ (単位行列) とする．

(2) $\boldsymbol{z}(x) = e^{-x}\boldsymbol{y}(x)$ とおいて，$\boldsymbol{z}(x)$ に関する微分方程式系を導け．

(3) $(*)$ の解 $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{y}(\pi) = e^{\pi}\boldsymbol{z}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすように，定ベクトル $\boldsymbol{c}$ を決めよ．