2020年度　神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程　入学試験問題
（数学：機械工学専攻）

注意事項

(1) 第1問〜第3問は問題用紙の表面に，第4問は問題用紙の裏面にあります．

(2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください．例えば問題1は，左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください．解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合，採点の対象となりません．

(3) 解答欄が不足した場合は，裏面に書いてよろしい．ただし，表と上下を逆にしてください．

(4) 受験番号と科目名の裏の部分には，何も書いてはいけません．

1. つぎの各問いに答えよ.

(1) n を自然数とし, 関数 $f_n(x,y)=(a_n+b_ne^{-n^2x})\cos ny$ を考える.

(1-a) $f_n(x,y)$ が $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(x,y)+\sqrt{n}\cos ny,\ x>0,\ 0<y<\pi$ および $f_n(0,y)=0,\ 0<y<\pi$ を満たすように係数 $a_n,\ b_n$ を定めよ.

(1-b) $D=\{(x,y) : x>0,\ 0\le y\le \pi\}$ とし, (1-a) の $a_n,\ b_n$ をもつ関数 $f_n(x,y)$ を考える. 任意に固定された $(x,y)\in D$ に対して, 極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$ を求めよ.

(2) a,b を相異なる実数とし, 行列 $A=\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ を考える.

(2-a) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2-b) 自然数 n に対して, A^n を求めよ.

2. $f(z)=2z^3-5z^2+6z-2$ とし, $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ とおく.

(1) $f(1+i)=0$ であることを確認して, $f(z)=0$ の根をすべて求めよ.

(2) $g(z)$ の各極における留数をそれぞれ求めよ.

(3) 原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径 1 の円を C とする. このとき, 複素積分 $\displaystyle\int_C g(z)\,dz$ の値を求めよ.

3. $D=\{(x,y) : x>0,\ y>1\}$ 上の関数 $F(x,y)=2xy^2\log y,\ G(x,y)=x^2y$ を考える.

(1) D において

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\lambda(y)G(x,y)\}=\frac{\partial}{\partial y}\{\lambda(y)F(x,y)\}$$

を満たす恒等的には 0 でない関数 $\lambda(y),\ y>1$ を 1 つ求めよ.

(2) つぎの全微分方程式を考える.

$$F(x,y)dx+G(x,y)dy=0 \qquad (*)$$

(1) の結果を用いて, D において点 $(1,e)$ を通る $(*)$ の解を求めよ.

(裏面へ続く)

4. $0 < p < \pi$ とし，関数 $f(x) = \begin{cases} 1, & -p \leq x \leq p, \\ 0, & -\pi \leq x < -p,\ p < x \leq \pi \end{cases}$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を，記号を変えずに $f(x)$ で表わす．$f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき，各係数 a_0, a_n, b_n の値を計算せよ．

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(2) (1) の結果とパーセバルの等式を利用して，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 np}{n^2}$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ の値をそれぞれ求めよ．