

2021 年度 神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程 入学試験問題
(数学：機械工学専攻)

注意事項

- (1) 問題 1 ～問題 3 は問題用紙の表面に，問題 4 は問題用紙の裏面にあります。
- (2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題 1 は，左上端に 1 と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合，採点の対象となりません。
- (3) 解答欄が不足した場合は，裏面に書いてよろしい。ただし，表と上下を逆にしてください。
- (4) 受験番号と科目名の裏の部分には，何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ を考える.

(1-a) 2以上の自然数 n に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

(1-b) 任意の自然数 n に対し, $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(2) ある自然数 m について $A^m = O$ を満たす正方行列 A を冪零行列という. ただし O は零行列である.

(2-a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は冪零行列であることを示せ.

(2-b) 任意の冪零行列の固有値は0のみであることを示せ.

2. 複素関数 $f(z) = \frac{e^{-2z}}{(z-1)^2}$ を考える. $R > 1$ とする. 複素平面上の $-Ri$ を始点とし, 原点を中心とする半径 R の円周を反時計方向に進んで終点 Ri に至る半円弧を C_1 とする. また始点 Ri から終点 $-Ri$ に至る線分を C_2 とする. 単純閉曲線 C を $C = C_1 \cup C_2$ とおく.

(1) 複素積分 $\int_C f(z) dz$ の値を求めよ.

(2) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz = 0$ となることを示せ.

(3) (1) と (2) の結果を用いて積分 $I = \int_0^\infty \frac{2t \sin 2t - (t^2 - 1) \cos 2t}{(t^2 + 1)^2} dt$ の値を求めよ.

3. $y = y(x)$, $x \geq 0$ に関するつぎの非同次微分方程式

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-2x} \quad (*)$$

を考える.

(1) 同次微分方程式 $y'' + 4y' + 3y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) (*) の一般解を求めよ.

(3) 初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ のもとで (*) の解 $y(x)$ を求め, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x y(x)$ が存在する場合にはその値を求めよ.

(裏面へ続く)

4. n を自然数とし、関数 $f(x) = \begin{cases} n(1 - n|x|), & |x| \leq 1/n, \\ 0, & |x| > 1/n \end{cases}$ を考える.

- (1) 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を、記号を変えずに $f(x)$ で表わす. $f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき、各係数 a_0, a_k, b_k の値を計算せよ.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- (2) (1) で得た係数 a_k を $a_k(n)$ と表わす. 任意に固定された k に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k(n)$ を求めよ.

- (3) (1) の結果を利用して、級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(1 - \cos \frac{k}{n}\right)$ の値を求めよ.