2023年度　神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程　入学試験問題
（数学：機械工学専攻）

注意事項

(1) 問題１～問題３は問題用紙の表面に，問題４は問題用紙の裏面にあります．

(2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください．例えば問題１は，左上端に１と印刷されている解答用紙に答えを書いてください．解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合，採点の対象となりません．

(3) 解答欄が不足した場合は，裏面に書いてよろしい．ただし，表と上下を逆にしてください．

(4) 受験番号と科目名の裏の部分には，何も書いてはいけません．

1. つぎの各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)=e^{x+y}$ に対して，平均値定理

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k) \quad (0<\theta<1)$$

が成り立つことが知られている．上式を満たす θ を，h と k を用いて表わせ．ただし，$h+k\neq 0$ とする．さらに，$h+k\neq 0$ を保った状態で $(h,k)\to(0,0)$ としたときの θ の極限，すなわち $\displaystyle\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h+k\neq 0}}\theta$ を求めよ．

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\1&-2&0\end{pmatrix}$ と $AB=\begin{pmatrix}0&2\\-2&4\\1&0\end{pmatrix}$ を満たす行列 B を考える．

(2-a) $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ とおく．$AX=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $AY=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ を満たすベクトル X, Y を求めよ．

(2-b) (2-a) の結果を用いて，行列 B を求めよ．

2. n を自然数とする．複素関数 $f_n(z)=(z-1)(z-2)\cdots(z-n)$ に対して，複素積分 $\displaystyle\int_{C_n}\frac{zf_n'(z)-nf_n(z)}{zf_n(z)}dz$ を n の関数として $\Phi(n)$ と表わす．ただし，C_n は原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径 $n+1$ の円とする．

(1) $\Phi(1)$ と $\Phi(2)$ の値を求めよ．

(2) 3 以上の自然数 n に対して，$\Phi(n)$ の値を求めよ．

3. $y=y(x)$, $x>0$ に関するつぎの微分方程式

$$xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=0 \qquad (*)$$

を考える．

(1) $y=e^x$ が方程式 $(*)$ の解の一つであることを示せ．

(2) $u=ye^{-x}$ とおき，u に関する微分方程式を導け．さらにこの微分方程式を解き，方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ の一組の基本解を求め，そのロンスキアン $W(x)$ を計算せよ．

（裏面へ続く）

4. n を 2 以上の自然数とし，関数

$$f(x) = \begin{cases} [\,|x|\,], & |x| \leq n, \\ 0, & |x| > n \end{cases}$$

を考える．ただし，$[a]$ は a 以下の最大整数を表わす．

(1) $f(x)$ のグラフを描け．

(2) $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$, $-\infty < t < \infty$ を求めよ．

(3) $1 < L < 2$ とする．(2) の結果を利用して，等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nt)\cos(Lt)}{t} dt = \frac{\pi}{n-1} + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kt)\cos(Lt)}{t} dt$$

が成り立つことを示せ．