科目名：流体力学　［１／３］

（問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること）

[1] 流体の密度を $\rho(t, \boldsymbol{x})$，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ とする．ここで，t は時間，$\boldsymbol{x}$ は位置ベクトルである．流体中に任意の検査体積 V を考える．このとき，検査体積の表面を S，外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．また，体積力は無視できるものとする．以下の問いに答えなさい．

(1) 検査体積 V の質量保存則は，

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0, \tag{1A}$$

と表される．密度が一定のとき，式 (1A) を用いて，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{1B}$$

となることを示しなさい．

(2) 表面 S を通って単位時間に流入する運動量を $\boldsymbol{Q}$ とするとき，$\boldsymbol{Q}$ を面積分を用いて表しなさい．

(3) 応力場を

$$\boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{x}) = -p(t, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{I}, \tag{1C}$$

とする．ここで，p は圧力，$\boldsymbol{I}$ は恒等テンソルである．検査体積 V に作用する力の合力は，

$$\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} dS, \tag{1D}$$

と表すことができる．このとき，運動量保存則が

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = -\nabla p, \tag{1E}$$

となることを示しなさい．ただし，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のテンソル積を表す．

(4) 式 (1E) を変形して，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \tag{1F}$$

となることを示しなさい．ただし，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対して，

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{a}) \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} \cdot \nabla) \boldsymbol{b}, \tag{1G}$$

である．

(5) 流れが定常で，密度が一定，かつ渦なしであるとする．流体中のよどみ点の圧力を p_0 とするとき，流体中の任意の位置で，

$$\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + p = p_0, \tag{1H}$$

となることを式 (1F) を用いて示しなさい．ただし，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{|\boldsymbol{a}|^2}{2}\right) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}, \tag{1I}$$

である．

科目名：流体力学　[3 / 3]

（問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること）

[2] 断面積の大きな容器に密度 ρ (一定) の水が溜められており，水面は圧力 P_∞ の大気にさらされている．この容器の側面に内径 D の円管 1 と円管 2 が接続されており，それぞれの円管の先端から大気中に速度 u_1 および u_2 で水が定常的に流出している．円管 1 と 2 の接続位置は容器内の水面から下方にそれぞれ h および $2h$ の高さであり，管長は各々$3L/2$ および L である．管出口において水は直径 D の円形断面を有する噴流となって水平方向に真っ直ぐに流出し，円管 1 からの噴流は静止平板 1 に，円管 2 からの噴流は静止平板 2 に衝突する．平板 1 と平板 2 は図のように水平面から各々$\theta = \pi/2$ および $\pi/3$ の角度で固定されている．平板面積は噴流断面積に比べて十分に大きく，衝突した水は平板に沿って流れるものとする．大気中の圧力は P_∞ で一様であり，容器の断面積は水の流出に伴う水位変化が無視できるほど大きいものとする．また，円管 1, 2 は互いの入口の流れに影響を及ぼさないものとする．重力加速度の大きさを g とする．以下の問いに答えなさい．

(1) u_1 に対する u_2 の比 u_2/u_1 を求めなさい．ただし，水の粘性による損失は考えないものとする．

(2) 円管 1 からの噴流が平板 1 に及ぼす板に垂直方向の力を F_1，円管 2 からの噴流が平板 2 に及ぼす板に垂直方向の力を F_2 とする．これらの力の比 F_2/F_1 を求めなさい．ただし，水の粘性による損失および噴流に対する重力及び空気抵抗は考えないものとする．

(3) 水の粘性による損失のうち，円管内の摩擦圧力損失のみ考慮する．円管 1 の管摩擦係数が定数 λ_1 で与えられるとき，u_1 を h, g, L, D, λ_1 を用いて表しなさい．

(4) 問い (3) と同じ条件で，円管 2 では管摩擦係数が定数 $\lambda_2\ (\neq \lambda_1)$ で与えられるものとする．$u_1 = u_2$ となるときの λ_1 を λ_2, D, L を用いて表しなさい．