

2024年度 神戸大学大学院工学研究科  
博士課程前期課程 入学試験問題  
(数学：機械工学専攻)

注意事項

- (1) 問題1～問題3は問題用紙の表面に、問題4は問題用紙の裏面にあります。
- (2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません。
- (3) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい。ただし、表と上下を逆にしてください。
- (4) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1)  $xy$  平面上の集合  $D = \{(x, y) : y > 0\}$  において関数  $f(x, y) = \frac{e^x - x}{y + 1} + \frac{(y + 1)^2}{16}$  を考える.  $D$  における  $f(x, y)$  の極値を求めよ. また, それが極大値か極小値かを答えよ.

(2) 行列  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  を考える.

(2-a)  $n$  を自然数とする. 正方行列  $T$  の固有値の一つを  $\lambda$ ,  $\lambda$  に対応する固有ベクトルを  $v$  とする.  $T^n v = \lambda^n v$  が成り立つことを示せ.

(2-b)  $A$  の全ての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2-c)  $x_n A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$  を満たす 2次元行ベクトル  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  を求めよ.

2. 複素関数  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 1}$  を考える.

(1)  $f(z)$  の全ての特異点とそこにおける留数を求めよ.

(2) 複素積分  $\int_C f(z) dz$  の値を求めよ. ただし,  $C$  は原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径 1 の円とする.

(3) (2) の結果を用いて, 定積分  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos \theta} d\theta$  の値を求めよ.

3.  $y = y(x)$ ,  $x > 0$  に関する次の微分方程式

$$xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (*)$$

を考える.

(1)  $u = \frac{y}{x}$  とおき,  $u$  に関する微分方程式を導け.

(2) 変数変換  $s = u + \sqrt{1 + u^2}$  を利用して, 不定積分  $\int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du$  を求めよ.

(3) (1) と (2) の結果を用いて, 条件  $y(1) = 0$  を満たす  $(*)$  の解  $y(x)$  を求めよ.

(裏面へ続く)

4.  $a$  と  $b$  を正の定数とし, 関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} \cos bx, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

と  $g(x) = \cos bx, x \geq 0$  を考える.

(1)  $g(x)$  のラプラス変換を求めよ. その際, 結果のみでなく, 導出の過程も詳しく記せ.

(2)  $f(x)$  のフーリエ変換  $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx, -\infty < t < \infty$  を求めよ. その

際, (1) の結果を用いてもよい.