2025年度　神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程　入学試験問題
（数学：機械工学専攻）

注意事項

(1) 問題１～問題３は問題用紙の表面に，問題４は問題用紙の裏面にあります．

(2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください．例えば問題１は，左上端に１と印刷されている解答用紙に答えを書いてください．解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合，採点の対象となりません．

(3) 解答欄が不足した場合は，裏面に書いてよろしい．ただし，表と上下を逆にしてください．

(4) 受験番号と科目名の裏の部分には，何も書いてはいけません．

1. つぎの各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を区間 $[0,1]$ で定義された非負連続関数とする．任意の $b>0$ に対して，等式 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = b\int_a^1 f(x)dx$ を満たす $a\in[0,1]$ が存在することを示せ．また，$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $b=2$ としたとき, a の値を求めよ．

(2) 2次以下の1変数多項式のなす実ベクトル空間 $V=\{a_0+a_1x+a_2x^2 : a_0,\ a_1,\ a_2 \text{ は実数}\}$ を考える．V 上の線形変換 T を $T(f(x)) = f(2+3x)$ で定義する．

(2-a) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する線形変換 T の表現行列 A を求めよ．

(2-b) (2-a) で得られた A の固有値および線形変換 T の固有値をそれぞれ求めよ．

2. 複素関数 $f(z)=e^{z/4}$, $g(z)=e^z+1$ を考える．また，R を正の実定数とし，複素平面上の $-R$ を始点とし，終点 R に至る線分を C_1, 始点 R から終点 $R+2\pi i$ に至る線分を C_2, 始点 $R+2\pi i$ から終点 $-R+2\pi i$ に至る線分を C_3, 始点 $-R+2\pi i$ から終点 $-R$ に至る線分を C_4 とする．そして $C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$ とおく．

(1) $g(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた複素数が $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の1位の極であることを用いて，複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{g(z)}dz$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{f(z)}{g(z)}dz = 0$ および $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_4}\frac{f(z)}{g(z)}dz = 0$ を示せ．

(4) (2) と (3) の結果を用いて，積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x/4}}{e^x+1}dx$ の値を求めよ．

3. 独立変数 x, 従属変数 y に関する微分方程式

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (*)$$

の二つの解 $y=y_1(x)$, $y_2(x)$ に対し，ロンスキアン $W(x)$ を次式で定義する．

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

(1) $W(x)$ が微分方程式 $W' = -a(x)W$ を満たすことを示せ．

(2) $x\geq 0$ とする．$a(x)$, $b(x)$ および微分方程式 $(*)$ の解の一つ $y_1(x)$ を次式で与える．

$$a(x) = -\frac{3x+4}{3x+1}, \qquad b(x) = -\frac{6x+5}{3x+1}, \qquad y_1(x) = e^{-x}$$

また，$y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$ とする．$W(x)$ と $y_2(x)$ を求めよ．

（裏面へ続く）

4. $0 < c < 1$ とし，関数 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < c, \\ 1, & c \leq x < 1 \end{cases}$ を考える．

(1) $f(x)$ を周期 2 の奇関数に拡張した関数を，記号を変えずに $f(x)$ で表わす．$f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき，各係数 a_0，a_n，b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を求めよ．

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$$

(2) (1) の結果を用いて，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n \right)^2$ の値を求めよ．